МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

# Задачи по курсу "Случайные процессы"

Выполнила
студентка 417 группы
Бакина Ирина
Преподаватель: Круглов В.М.

Москва
2007

## Задача 1

Доказать, что если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ независимы, то любая комбинация событий, составленная из $A_1, A_2, \dots, A_n$ и их дополнений $A_1^c, A_2^c, \dots, A_n^c$ является независимой.

**Решение** События $A_1, A_2, \dots, A_n$ независимы $\Leftrightarrow \forall A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m} \in \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, где m⩽n и $A_{i_j} \neq A_{i_k}$ при $i \neq k$ выполнено:

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}) = \prod_{k=1}^{m} P(A_{i_k}) \tag{1}$$

В задаче требуется доказать независимость событий $A_{i_1}^c, \dots, A_{i_r}^c, A_{i_{r+1}}, A_{i_m}, \forall r, m \leqslant n$, $A_{i_j} \neq A_{i_k}, A_{i_j}^c \neq A_{i_k}^c$ при $j \neq k$, и никакое $A_{i_k}^c$ не является дополнение ни для какого $A_{i_j}$ при $1 \leqslant j \leqslant r, r+1 \leqslant k \leqslant m$, т.е. выполнение следующего условия:

$$P(A_{i_1}^c, \dots, A_{i_r}^c, A_{i_{r+1}}, \dots, A_{i_m}) = P(A_{i_1}^c) \times \dots \times P(A_{i_r}^c) \times P(A_{i_{r+1}}) \times \dots \times P(A_{i_m}) \tag{2}$$

Доказательство будем проводить методом индукции по r, где r - число дополнений в (2). Не ограничивая общности, будем считать, что события $A_{i_1}^c, \dots, A_{i_r}^c, A_{i_{r+1}}, \dots, A_{i_m}$ есть $A_1^c, \dots, A_r^c, A_{r+1}, \dots, A_m$.

**1)**Для r=1 имеем:

$$P(A_1^c, A_2, \dots, A_m) = P(A_2, \dots, A_m) - P(A_1, A_2, \dots, A_m) = \{\text{по формуле(1)}\} =$$
$$= \prod_{k=2}^{m} P(A_k) - \prod_{k=1}^{m} P(A_k) = (1 - P(A_1)) \prod_{k=2}^{m} P(A_k) = P(A_1^c) \prod_{k=2}^{m} P(A_k)$$

Таким образом для r=1 и $\forall m \leqslant n$ формула (2) верна.

**2)**Пусть формула верна для некоторого r:

$$P(A_1^c, \dots, A_r^c, A_{r+1}, \dots, A_m) = \prod_{k=1}^{r} P(A_k^c) \times \prod_{p=r+1}^{m} P(A_p) \tag{3}$$

Докажем, что она останется верной при переходе к r+1:

$$P(A_1^c, \dots, A_{r+1}^c, A_{r+2}, \dots, A_m) = P(A_2^c, \dots, A_{r+1}^c, A_{r+2}, \dots, A_m) -$$
$$- P(A_1, A_2^c, \dots, A_{r+1}^c, A_{r+2}, \dots, A_m) = \{\text{используем предположение индукции(3)}\} =$$
$$= \prod_{k=2}^{r+1} P(A_k^c) \prod_{p=r+2}^{m} P(A_p) - P(A_1) \prod_{k=2}^{r+1} P(A_k^c) \prod_{p=r+2}^{m} P(A_p) =$$
$$= (1 - P(A_1)) \prod_{k=2}^{r+1} P(A_k^c) \prod_{p=r+2}^{m} P(A_p) = \prod_{k=1}^{r+1} P(A_k^c) \prod_{p=r+2}^{m} P(A_p)$$

Таким образом, справедливость утверждения доказана.

## Задача 2

Доказать, что наименьшая $\sigma$-алгебра, содержащая все множества вида [a,b), совпадает $\mathcal{B}(R)$.

**Решение** Обозначим наименьшую $\sigma$-алгебру, содержащую все множества вида [a,b), через $\mathcal{B}'(R)$. Для доказательства данного утверждения покажем двустороннее вложение $\mathcal{B}(R)$ и $\mathcal{B}'(R)$.

**1)** $\mathcal{B}(R) \subseteq \mathcal{B}^{'}(R)$

Покажем, что с помощью [a,b) можно получить произвольное открытое множество, т.е.: $(a,b),(a,+\infty),(-\infty,b),(-\infty,+\infty)$. Основываясь на аксиомах $\sigma$-алгебры, имеем:

$$[a,+\infty) = \bigcup_{n=0}^{\infty}[a,a+n) = \bigcup_{n=0}^{\infty}[a+n,a+n+1) \tag{4}$$

$$(-\infty,a) = \overline{[a,+\infty)} \tag{5}$$

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}[a,a+\frac{1}{n}) = \overline{(-\infty,a) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}[a+\frac{1}{n+1},a+\frac{1}{n}) \cup [a+1,+\infty)} \tag{6}$$

$$[a,b] = [a,b) \cup \{b\} \tag{7}$$

$$(-\infty,b] = (-\infty,b) \cup \{b\} \tag{8}$$

$$(-\infty,+\infty) = (-\infty,a) \cup [a,+\infty) \tag{9}$$

$$(a,+\infty) = \overline{(-\infty,a]} \tag{10}$$

$$(a,b] = \overline{(-\infty,a] \cup (b,+\infty)} \tag{11}$$

$$(a,b) = \overline{(-\infty,a] \cup [b,+\infty)} \tag{12}$$

Таким образом, наименьшая $\sigma$-алгебра, содержащая все множества вида [a,b), содержит также все открытые множества, а, следовательно, и наименьшую $\sigma$-алгебру, содержащую все открытые множества $\Rightarrow \mathcal{B}(R) \subseteq \mathcal{B}^{'}(R)$

**2)** $\mathcal{B}^{'}(R) \subseteq \mathcal{B}(R)$

Покажем, что имея все открытые множества на прямой, можно получить произвольный [a,b).

$$\{a\} = \overline{(-\infty,a) \cup (a,+\infty)}$$
$$[a,b) = \{a\} \cup (a,b)$$

Видим, что наименьшая $\sigma$-алгебра, содержащая все открытые множества на прямой, содержит все множества вида [a,b), и, значит, наименьшую $\sigma$-алгебру, порождённую [a,b) $\Rightarrow \mathcal{B}^{'}(R) \subseteq \mathcal{B}(R)$

Из 1) и 2) имеем: $\mathcal{B}^{'}(R) = \mathcal{B}(R)$, и утверждение доказано.

## Задача 3

Доказать, что случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы $\Leftrightarrow$

$$P(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n) = \prod_{k=1}^{n} P\ (\xi_k\ <\ x_k) \tag{13}$$

**Решение** По определению, случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называются независимыми, если $\forall$ борелевских множеств $B_1, B_2, \ldots, B_n$ на прямой выполнено:

$$P(\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_n \in B_n) = \prod_{k=1}^{n} P(\xi_k \in B_k) \tag{14}$$

**Необходимость** Очевидно, достаточно рассмотреть $B_1 = (-\infty, x_1), \ldots, B_n = (-\infty, x_n)$.

**Достаточность** Известно, что выполнено (13).

**1.** Сначала покажем выполнение (14) для борелевских множеств вида: $B_1 = [x_{11}, x_{12}), \ldots, B_n = [x_{n1}, x_{n2})$, т.е. докажем следующее вспомогательное утверждение: Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы, то:

$$P(\xi_1 \in [x_{11}, x_{12}), \ldots, \xi_r \in [x_{r1}, x_{r2}), \xi_{r+1} < x_{r+1}, \ldots, \xi_n < x_n) =$$
$$= \prod_{k=1}^{r} P(\xi_k \in [x_{k1}, x_{k2})) \prod_{p=r+1}^{n} P(\xi_p < x_p)$$

Будем доказывать по индукции.

**1)** r=1:

$$P(\xi_1 \in [x_{11}, x_{12}), \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n) =$$
$$= P(\xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n) - P(\xi_1 \notin [x_{11}, x_{12}), \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n) =$$
$$= P(\xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n) - P(\xi_1 \in (-\infty, x_{11}) \cup [x_{12}, +\infty), \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n) =$$
$$= P(\xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n) - P(\xi_1 < x_{11}, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n) - P(\xi_1 \geqslant x_{12}, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n) =$$
$$= P(\xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n) - P(\xi_1 < x_{11}, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n) -$$
$$- (P(\xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n) - P(\xi_1 < x_{12}, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n)) =$$
$$= P(\xi_1 < x_{12}, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n) - P(\xi_1 < x_{11}, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n) =$$
$$= P(\xi_1 < x_{12}) \prod_{k=2}^{n} P(\xi_k < x_k) - P(\xi_1 < x_{11}) \prod_{k=2}^{n} P(\xi_k < x_k) =$$
$$= (P(\xi_1 < x_{12}) - P(\xi_1 < x_{11})) \prod_{k=2}^{n} P(\xi_k < x_k) = P(\xi_1 \in [x_{11}, x_{12})) \prod_{k=2}^{n} P(\xi_k < x_k)$$

**2)** Пусть утверждение верно для r-1, докажем для r:

$$P(\xi_1 \in [x_{11}, x_{12}), \xi_2 \in [x_{21}, x_{22}), \ldots, \xi_r \in [x_{r1}, x_{r2}), \xi_{r+1} < x_{r+1}, \ldots, \xi_n < x_n) =$$
$$= P(\xi_2 \in [x_{21}, x_{22}), \ldots, \xi_r \in [x_{r1}, x_{r2}), \xi_{r+1} < x_{r+1}, \ldots, \xi_n < x_n) -$$
$$- P(\xi_1 \notin [x_{11}, x_{12}), \xi_2 \in [x_{21}, x_{22}), \ldots, \xi_r \in [x_{r1}, x_{r2}), \xi_{r+1} < x_{r+1}, \ldots, \xi_n < x_n) =$$

$$= P(\xi_2 \in [x_{21}, x_{22}), \ldots, \xi_r \in [x_{r1}, x_{r2}), \xi_{r+1} < x_{r+1}, \ldots, \xi_n < x_n) -$$
$$- P(\xi_1 < x_{11}, \xi_2 \in [x_{21}, x_{22}), \ldots, \xi_r \in [x_{r1}, x_{r2}), \xi_{r+1} < x_{r+1}, \ldots, \xi_n < x_n) -$$
$$- (P(\xi_2 \in [x_{21}, x_{22}), \ldots, \xi_r \in [x_{r1}, x_{r2}), \xi_{r+1} < x_{r+1}, \ldots, \xi_n < x_n) -$$
$$- P(\xi_1 < x_{21}, \xi_2 \in [x_{21}, x_{22}), \ldots, \xi_r \in [x_{r1}, x_{r2}), \xi_{r+1} < x_{r+1}, \ldots, \xi_n < x_n)) =$$
$$= P(\xi_1 < x_{21}, \xi_2 \in [x_{21}, x_{22}), \ldots, \xi_r \in [x_{r1}, x_{r2}), \xi_{r+1} < x_{r+1}, \ldots, \xi_n < x_n)) -$$
$$- P(\xi_1 < x_{11}, \xi_2 \in [x_{21}, x_{22}), \ldots, \xi_r \in [x_{r1}, x_{r2}), \xi_{r+1} < x_{r+1}, \ldots, \xi_n < x_n) =$$
$$= \{\text{по предположению индукции}\} =$$
$$= (P(\xi_1 < x_{21}) - P(\xi_1 < x_{11})) \prod_{k=2}^{r} P(\xi_k \in [x_{k1}, x_{k2})) \prod_{p=r+1}^{n} P(\xi_p < x_p) =$$
$$= \prod_{k=1}^{r} P(\xi_k \in [x_{k1}, x_{k2})) \prod_{p=r+1}^{n} P(\xi_p < x_p)$$

Вспомогательное утверждение доказано.

**2.** В силу утверждения, сформулированного в задаче 1, и представлений (4)-(12) имеем, что утверждение задачи верно и в том случае, когда борелевские множества $B_1, \ldots, B_n$ имеют вид: $[a, +\infty), (-\infty, a), \{a\}, [a, b], (-\infty, b], (-\infty, +\infty), (a, +\infty), (a, b], (a, b)$.

В самом деле: если события $A_1, \ldots, A_n$ несовместны, то

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \tag{15}$$

Значит, для (5) и (10) утверждение справедливо в силу задачи 1; для (4), (7)-(9) - в силу (15); для (6),(11),(12) - в силу задачи 1 и (15).

**3.** Произвольное объединения, пересечения и дополнения множеств $[a, +\infty), (-\infty, a), \{a\}, [a, b], (-\infty, b], (-\infty, +\infty), (a, +\infty), (a, b], (a, b)$ всегда можно представить в виде объединения непересекающихся множеств вида $[a, +\infty), (-\infty, a), \{a\}, [a, b], (-\infty, b], (-\infty, +\infty), (a, +\infty), (a, b], (a, b)$, поэтому утверждение остаётся верным и в этом случае.

Утверждение доказано.